Ueber die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von sieben Kuben.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Julius F. Post

aus Neuhaus a. d. O. (Provinz Hannover).

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Halle (Saale)
Buchdruckerei Hohmann
1920.

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer.

Inhalt.

Seite

§ 1. Einleitung. 5

Kapitel 1. Hilfssätze.

§ 2. Ein Hilfssatz aus der Primzahlenlehre. 6

§ 3. Ein Hilfssatz über kubische Kongruenzen. 7

§ 4. Hilfssätze über ternäre quadratische Formen. 8

Kapitel 2. Neue Zahlklassen g_7.

§ 5. Neue Zahlklassen g_7. 13

Kapitel 3. Eine neue Abschätzung von $\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x}$

§ 6. Ungerade Zahlen g_7 16

§ 7. Zahlen $h=2(2k+1)$, die g_7 sind. 24

§ 8. Zahlen $h=4(2k+1)$, die g_7 sind. 26

§ 9. Zahlen $h=8k$, die g_7 sind. 30

§ 10. Zusammenfassung und Abschätzung von $\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x}$ 32

§ 11. Schluß. 32

Verbesserungen.

Abkürzungen: S. = Seite, Z. = Zeile.

S. 6, Z. 24: e ist eine beliebige positive Zahl.

S. 12, Z. 15: $\geqq$ statt $\leqq$ Φ.

S. 15, Z. 24: Es ist zu lesen: $\frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$.

S. 17, Z. 8: *jeder* statt *jede*.

S. 18, Z. 3: a_1 statt α_1. S. 18, vorletzte Zeile: *den* statt *die*.

S. 19: In (20) $\geqq$ statt $\leqq$.

S. 20, Z. 3 und 4: *andeutungsweise* statt *skizzenhaft, oben* statt *hier*.

S. 28, Z. 16: *der* statt *das*.

S. 33, vorletzte Zeile: $\frac{1}{3!}$ statt $\frac{1}{3:}$.

§ 1. Einleitung.

Jede ganze Zahl ist ein Kubus oder aus 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 Kuben zusammengesetzt!

So lautete ein Lehrsatz des englischen Mathematikers *Waring.*[1]) Erst nach mehr als 100 Jahren gelang es *Wieferich*[2]) seine Richtigkeit darzutun. Empirische Untersuchungen gingen dem vorher, sie machten es aber wahrscheinlich, daß fast alle Zahlen in acht und noch weniger Kubikzahlen zerlegbar sind. Damit war das *Problem* aufgerollt, *die ganzen Zahlen als Summen von möglichst wenig Kuben* darzustellen. Was ist bis heute streng theoretisch nachgewiesen?

Die letzten Ergebnisse bringt eine Arbeit von *Baer:*[3]) Benennen wir jede Zahl mit g_ν, die durch eine Summe von ν oder weniger Kuben darstellbar ist, so ergibt sich: Alle Zahlen $\geqq 23 \cdot 10^{14}$ sind g_8. Eine Zerlegung in sieben Kuben gestatten alle Zahlen $2744s$, wo s ungerade, und alle hinreichend großen Zahlen, die 78 bestimmten Restklassen mod. 432 angehören. Bedeute $C_7(x)$ die Anzahl aller ganzen Zahlen $\leqq x$, die sich in sieben (oder weniger) Kuben zerspalten lassen, so folgte

$$\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} \geqq \frac{13}{72} + \frac{1}{27 \cdot 5488} = 0{,}1805.$$

D. h. *Mehr als 18 Prozent aller ganzen Zahlen sind* g_7.

In Anlehnung an Baer'sche Methoden versuche ich zunächst neue Zahlklassen g_7 zu ermitteln. Diese erhöhen den bisher gefundenen Anteil nicht wesentlich. Hauptziel meiner Untersuchungen wird es darum sein, zu zeigen: In einer langen Reihe aufeinanderfolgender Zahlen ist ein bedeutend größerer Teil, als bisher gefunden, vom Charakter g_7. Indem wir aus den ungeraden Zahlen möglichst viel Zahlen herausholen, die zuverlässig g_7 sind, entsprechend aus den Zahlen, die das Doppelte, das Vierfache von ungeraden Zahlen und die durch 8 teilbar sind, ergibt sich, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} \geqq 0{,}4258.$$

Mindestens 42 Prozent aller ganzen Zahlen sind g_7.

Den eigentlichen Untersuchungen sind 3 Gruppen von Hilfssätzen vorausgeschickt. In den Hauptbetrachtungen (Kapitel 3) werden nur die ungeraden Zahlen ausführlich abgehandelt. In allen anderen Fällen sind fast dieselben Schlüsse auf eine zweckmäßig abgeänderte Formel zu übertragen. Am Schluß meiner Abhandlung werde ich an Hand der v. Sterneckschen[4]) Tabelle Wahrscheinlichkeitsschlüsse ziehen, durch welche Mindestzahlen von Kuben im Wesentlichen die ganzen Zahlen darstellbar sein werden.

Kapitel 1. Hilfssätze.

§ 2. Ein Hilfssatz aus der Primzahlenlehre.

Sind m *und* $\varepsilon < m$ *zwei positive Konstanten, so gibt es für jede hinreichend große Zahl* g *beliebig viel Primzahlen* $p \equiv 2$ *(mod. 3), welche* g *folgendermaßen einschließen:*

$$(m-\varepsilon) \cdot p^3 < g < m \cdot p^3$$

Beweis: Zugrunde lege ich einen Satz der Primzahlentheorie von Hadamard und de la Vallée-Poussin (vgl. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, S. 469):

Sind k und l zwei teilerfremde Zahlen und $\varepsilon > o$, so wächst die Anzahl der Primzahlen $ky+l$ zwischen x und $(1+\varepsilon)x$ mit x ins Unendliche.

Wir wählen im Besondern $k=3$, $l=2$ d. h. $p \equiv 2$ (mod. 3) und $e = \sqrt[3]{\frac{m}{m-\varepsilon}} - 1$. Aus dem Charakter von e geht hervor, daß wir für ε jeden positiven Wert $< m$ wählen können. Ist dann g hinreichend groß, so gibt es genug Primzahlen $p \equiv 2$ (mod. 3), die inbezug auf $x = \sqrt[3]{\frac{g}{m}}$ die Ungleichungen $\sqrt[3]{\frac{g}{m}} < p < \sqrt[3]{\frac{g}{m-\varepsilon}}$ erfüllen. Ihre Umformung ergibt: $(m-\varepsilon)\, p^3 < g < m \cdot p^3$.

§ 3. Ein Hilfssatz über kubische Kongruenzen.

Ist die ganze Zahl m ein Produkt lauter verschiedener Primzahlen der Gestalt $3p_1 p_2 p_3 \ldots$, *dessen Faktoren lauter Primzahlen* $\equiv 2$ *(mod. 3) sind, ist ferner die ganze Zahl c zu m teilerfremd, so erfüllt jede ganze Zahl g die Kongruenz*

$$(1) \quad g \equiv c \cdot a^3 \pmod{m},$$

und zwar durchlaufen die g und a gleichzeitig ein vollständiges Restsystem modulo m.

Beweis: Da $(c, m) = 1$, hat die Kongruenz

$$(2) \quad g \equiv c \cdot x \pmod{m}$$

eine Lösung. Sei nun

$$(3) \quad (x, m) = d$$

und zerfälle ich

$$(4) \quad m = d \cdot n,$$

so muß

$$(5) \quad (x, n) = 1$$

sein. Hätten nämlich x und n einen Faktor p gemeinsam, so müßte dieser auch in d, dem größten gemeinsamen Teiler von x und $m = d \cdot n$ enthalten sein. Sowohl n als d wären durch p teilbar und nach (4) m durch das Quadrat von p. Das widerspricht aber m als einem Produkt verschiedener Primzahlen. Aus (5) folgt

$$(6) \quad x \equiv x^{1+\varphi(n)} \equiv x^{1+2\varphi(n)} \pmod{n}.$$

Da alle Teiler von m verschieden, folgt aus (3)

$$(7) \quad (d, n) = 1;$$

also

$$(8) \quad \varphi(m) = \varphi(d)\,\varphi(n).$$

Infolge der Voraussetzung, daß jedes $p_\nu \equiv 2 \pmod 3$ sein soll, kann

$$\varphi(m) = \varphi(3)\ \varphi(p_1)\,\varphi(p_2) \ldots$$
$$= (3-1) \cdot (p_1-1) \cdot (p_2-1) \ldots$$

nicht den Teiler 3 enthalten, mit Rücksicht auf (8) auch $\varphi(n)$ nicht durch 3 teilbar sein. Daraus folgt: Einer der Exponenten in (6) $1 + \varphi(n)$ oder $1 + 2\varphi(n)$ muß durch 3 teilbar sein. Es existiert daher mindestens eine Wurzel a_1 der Kongruenz

$$(9) \quad x \equiv a_1^3 \pmod{n}.$$

Da ferner nach (3) d ein Teiler von x ist, so erfüllt selbstverständlich jede Zahl

$$a_2 \equiv o \pmod{d}$$

die Kongruenz

$$(10) \quad x \equiv a_2^3 \pmod{d}.$$

Infolge (7) sind nun d und n teilerfremd, es existieren daher stets Zahlen a, die sowohl

$$a \equiv a_1 \pmod{n},$$

$$\text{als } a \equiv a_2 \pmod{d}$$

erfüllen. Ersetzt man in (9) und (10) a_1 und a_2 durch a und berücksichtigt, daß nach (4)

$$m = d \cdot n,$$

so genügt x der Kongruenz

$$(11) \quad x \equiv a^3 \pmod{m}.$$

In Rücksicht auf (2) gilt für g

$$(12) \quad g \equiv c\ a^3 \pmod{m}$$

Ersetze ich a durch $a' \equiv a \pmod{m}$, so ergibt sich leicht

$$c\,a'^3 \equiv c\,a^3$$

$$\equiv g \pmod{m}.$$

Das besagt: Jeder Restklasse a mod. m entspricht immer eine und nur eine einzige Restklasse g mod. m. Da g als beliebige ganze Zahl alle Restklassen mod. m annehmen darf, kann auf jede Klasse g nur eine und immer eine Klasse a mod. m entfallen. D. h. g und a durchlaufen gleichzeitig ein vollständiges Restsystem mod. m.

§ 4. Hilfssätze über ternäre quadratische Formen.

I. *Nur alle die ganzen Zahlen, die nicht von der Gestalt* $4^\sigma (8k + 7)$ *sind, wo* $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *lassen sich als Summen dreier Quadratzahlen, also durch* $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ *darstellen.*

Ein Beweis für diesen Satz ist zuerst von Gauß geführt worden. [Vgl. Disquis. arithmet., Art. 291, oder C F. Gauß' Werke, Bd. 1, 1870, S. 343/348.] Einen kürzeren Beweis hat Dirichlet gegeben. [Dieser Beweis ist wiedergegeben z. B. in Landau, Handbuch d. L. v. d. Verteil. der Primzahlen 1909, Bd. 1, S. 550/555.]

II. *Nur alle die ganzen Zahlen, die nicht die Gestalt* $4^\sigma (8k + 7)$ *besitzen, lassen sich durch die ganzzahlige Form* $a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2$ *darstellen.*

Beweis: Die Form $a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2$ vermag genau dieselben Zahlen darzustellen wie $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, denn man kann die letztere Form in die erstere überführen. Aus der Form $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ kann ich zwei Quadratzahlen, etwa a_2^2 und a_3^2, herausheben, die gleichartig sind, d. h. entweder beide gerade oder beide ungerade. Wird dann noch $a_2 \geqq a_3$ vorausgesetzt, so kann ich

$$a_2 = a_2' + a_3' \quad , \quad a_3 = a_2' - a_3'$$

ganzzahlig zerlegen. Setzen wir dann noch $a_1 = a_1'$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= a_1'^2 + (a_2' + a_3')^2 + (a_2' - a_3')^2 \\ &= a_1'^2 + 2a_2'^2 + 2a_3'^2 . \end{aligned}$$

III. *Nur alle die ganzen Zahlen, die nicht die Gestalt* $2 \cdot 4^\sigma(8k + 7)$ *haben, können ganzzahlig durch die Form* $a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2$ *dargestellt werden.*

Beweis: Sei g eine ganze Zahl, die verschieden von $2 \cdot 4^\sigma (8k + 7)$, so ist $2g$ verschieden von $4^{\sigma+1}(8k + 7)$. Nach II gestattet $2g$ folgende Zerlegung:

$$(1) \quad 2g = a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 .$$

Da $2g$ gerade, muß auch a_1 als gerade vorausgesetzt werden. Demnach:

$$a_1^2 = 4a_3'^2 .$$

Weiterhin setze ich

$$\begin{aligned} 2a_2^2 &= 2a_2'^2 \\ 2a_3^2 &= 2a'^2_3 . \end{aligned}$$

In Rücksicht auf (1) folgt:

$$2g = 2(2a_3'^2 + a_2'^2 + a_1'^2) ,$$

demnach muß jedes $g = a_1'^2 + a_2'^2 + 2a_3'^2$ sein. Wären nun auch Zahlen $2 \cdot 4^\sigma(8k + 7)$ in der Form $a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2$ zerlegbar, so würde daraus leicht folgen, daß Zahlen $4^{\sigma+1}(8k + 7)$ durch die Form $a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2$ sich darstellen lassen, müßten was aber II widerspricht

IV. *Nur alle die ganzen Zahlen, die nicht von der Gestalt* $9^\sigma(9k + 6)$ *sind, wo* $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *lassen sich in der Form*

$$a_1^2 + a_2^2 + 3a_3^2$$

zerlegen.

Diesen Satz habe ich *empirisch* gefunden. Ein vollständiger Beweis steht noch aus. Jedoch beweist Dirichlet [Journal f. d. reine und angew. Mathematik, Bd. 40, 1850, S. 228/232], daß alle nicht durch 8 teilbaren Zahlen in der angegebenen Form sich darstellen lassen. Es ist auch nicht schwer, zu zeigen, daß alle Zahlen von der Gestalt $9k+6$ in dieser Form nicht darstellbar sind.

V. *Sei X' eine beliebige [aber feste] ganze Zahl und die Reihe $X = X',\ X'+1,\ X'+2, \ldots,\ X'+U$ hinreichend lang, so sind asymptotisch angenähert.*

a) $\frac{11}{12}$ dieser Zahlen durch $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2$,

b) $\frac{10}{12}$ „ „ „ $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$,

c) $\frac{10}{12}$ „ „ „ $\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2$,

d) $\frac{7}{8}$ „ „ „ $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2$

darstellbar.

Beweis a): Um die Anzahl der Zahlen zu erhalten, die in der Form $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2$ zerlegbar sind, müssen wir in Rücksicht auf Hilfssatz II von allen Zahlen diejenigen in Abzug bringen, die von der Gestalt $2 \cdot 4^\sigma (8k+7)$ sind. Ich nehme an, U liege in folgenden Grenzen

$$(1) \qquad 16 \cdot 4^\nu \leqq U \leqq 16 \cdot 4^{\nu+1},$$

dann ist die Differenz zweier X

$$\leqq U \leqq 16 \cdot 4^{\nu+1}.$$

Demnach ist

die Anzahl der X der Gestalt $2(8k+7) \quad \leqq \frac{U}{16} + 1$,

die Anzahl der X der Gestalt $2 \cdot 4 (8k+7) \leqq \frac{U}{16 \cdot 4} + 1$,

die Anzahl der X der Gestalt $2 \cdot 4^2 (8k+7) \leqq \frac{U}{16 \cdot 4^2} + 1$,

. . . . . .

die Anzahl der X der Gestalt $2 \cdot 4^\nu (8k+7) \leqq \frac{U}{16 \cdot 4^\nu} + 1$.

Da die Differenz zweier $X \leqq 16 \cdot 4^{\nu+1}$, kann die Anzahl der durch $4^{\nu+1}$, also womöglich auch durch $4^{\nu+2}$, $4^{\nu+3}$ teilbaren Glieder nicht größer als 16 ausfallen. Die Gesamtanzahl der X von der Form

$$4^{\nu+1} \cdot 2(8k+7),\ 4^{\nu+2} \cdot 2(8k+7),\ 4^{\nu+3} \cdot 2(8k+7)$$

muß sein $\leqq 16$.

Die Gesamtanzahl der X von den Formen $2 \cdot 4^{\nu+1}_{\cdot}(8k+7)$, $2 \cdot 4^{\nu+2}_{\cdot}(8k+7)$, . . . muß $\geqq O$ sein. Es ergibt sich die Umgleichung

$$(7) \qquad A \geqq \frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^{\nu}}\right)-(\nu+1)\,.$$

Formt man (7) ebenso um wie (2), so ergibt sich in derselben Weise

$$(8) \qquad \lim_{U=\infty} A \geqq \tfrac{1}{12}\, U$$

(6) und (8) zusammen ergeben für A nur eine einzige Grenze

$$(9) \qquad \lim_{U=\infty} A = \tfrac{1}{12}\, U\,.$$

Demnach beträgt die Anzahl aller für die Form $\alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_3^2$ brauchbaren Zahlen asymptotisch angenähert $\frac{1}{12}\, U$, d. h. sie macht etwa $\frac{1}{12}$ der Anzahl aller X aus.

Die *Beweise für b), c) und d)* werden ganz entsprechend geführt. Für gewisse Grenzen definieren wir wieder B, C und D als die Anzahl derjenigen Zahlen, die zur Darstellung durch die Form

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2,$$
bezw. $\alpha_1^2+2\alpha_2^2+2\alpha_3^2,$
oder $\alpha_1^2+\alpha_2^2+3\alpha_3^2$

geeignet sind.

Für die beiden ersten Formen fallen nach I und II fort:

Die Zahlen $8k+7$, macht $\frac{1}{8}$ aller X aus,

„ „ $4\cdot(8k+7)$, „ $\frac{1}{8\cdot 4}$ „ X „

„ „ $4^2\cdot(8k+7)$, „ $\frac{1}{8\cdot 4^2}$ „ X „

. . . . . .

Demnach A, die Anzahl aller Zahlen $X=\alpha_1^2+\alpha_2^2+2\alpha_3^2$

$$(2) \quad \begin{cases} A \leqq \frac{U}{16}+1+\frac{U}{16\cdot 4}+1+\frac{U}{16\cdot 4^2}+1+\cdots+\frac{U}{16\cdot 4^{\nu}}+1+16 \\ \quad \leqq \frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu}}\right)+\nu+1+16\,. \end{cases}$$

Also ist auch

$$(3) \qquad \frac{A}{\frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{4^{\nu}}\right)} \leqq \frac{\frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu}}\right)+\nu+1+16}{\frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu}}\right)}$$

Aus (1) kann man nun folgern: r wird mit U beliebig groß, aber so, daß

$$(4) \qquad \lim_{U=\infty} \frac{r}{U} = O$$

wird.

In diesem Grenzfall geht (3) über in

$$(5) \qquad \frac{\lim_{U=\infty} A}{\frac{U}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} \leqq \frac{\frac{U}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}}{\frac{U}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} + \lim_{U=\infty} \frac{r+1+16}{\frac{U}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^r}\right)}$$

Das erste Glied rechts wird gleich 1. Im Sinne von (4) muß das zweite Glied verschwinden. Es ergibt sich für A die obere Grenze

$$(6) \qquad \lim_{U=\infty} A \leqq \frac{1}{12}\, U .$$

Entsprechend bestimmt man die untere Grenze.

Die Anzahl der X v. d. Gestalt $2\ (8k+7)$ ist $\geqq \frac{U}{16} - 1$,

„ „ „ X „ „ „ $2\cdot 4\ (8k+7)$ „ $\geqq \frac{U}{16\cdot 4} - 1$,

„ „ „ X „ „ „ $2\cdot 4^2\ (8k+7)$ „ $\geqq \frac{U}{16\cdot 4^2} - 1$,

. . . . . ,

Die Anzahl der X v. d. Gestalt $2\cdot 4^r\ (8k+7)$ ist $\leqq \frac{U}{16\cdot 4^r} - 1$.

Es ergibt sich $\lim_{U=\infty} B = \frac{U}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ und $\lim_{U=\infty} C = \frac{U}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$

$$= \frac{2}{12}\, U \qquad = \frac{2}{12}\, U .$$

Durch $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ und durch $\alpha_1^2+2\alpha_2^2+2\alpha_3^2$ sind beliebig angenähert $\frac{10}{12}$ aller X zerlegbar.

Unbrauchbar für $\alpha_1^2+\alpha_2^2+3\alpha_3^2$ sind nach III

die $9k+6$, macht $\frac{1}{9}$ der X aus,

die $9(9k+6)$, macht $\frac{1}{9\cdot 9}$ der X aus,

die $9^2(9k+6)$, macht $\frac{1}{9\cdot 9^2}$ der X aus,

. . . . . .

Es ergibt sich

$$\lim_{U=\infty} D = \frac{U}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8} U ,$$

asymptotisch genau $\frac{7}{8}$ aller X sind für die Darstellung durch $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2$ geeignet.

Kapitel 2. Neue Zahlklassen g_7.

§ 5. Neue Zahlklassen g_7.

Lehrsatz: Von einer bestimmten Stelle an sind alle die geraden Zahlen, die durch das Quadrat irgend einer bestimmten Primzahl $t \geqq 7$ teilbar sind, in sieben positiven Kuben zerlegbar.

Beweis: Setzen wir im Hilfssatz § 2 $m = 2t^2 (4 \cdot 6^3 t + 10t^4 + 1)$, $s = 2t^2$, $g = h$, $\varepsilon = t^2$, so existiert zu jeder hinreichend großen Zahl h mehr als eine Primzahl $p \equiv 2 \pmod 3$, sodaß

(1) $$2t^2 (4 \cdot 6^3 t + 10t^4) p^3 < h < 2t^2 (4 \cdot 6^3 t + 10t^4 + 1) p^3 .$$

Von den Primzahlen p halten wir eine fest, die zu t teilerfremd ist. Wir nehmen weiter an, daß die an sich beliebige Zahl h durch $2t^2$ teilbar sei. Setzen wir dann

(2) $$h = 2t^2 (g + 10t^4 p^3),$$

so liegt die ganze Zahl g in folgenden Grenzen:

(3) $$4 \cdot 6^3 t p^3 < g < (4 \cdot 6^3 t + 1) p^3 .$$

Im Hilfssatz § 3 können wir $c = 4t$ und $m = 3p$ setzen, da $p \equiv 2 \pmod 3$ und $4t$ zu $3p$ teilerfremd ist. Es gilt dann:

(4) $$g \equiv 4t a'^3 \pmod{3p}$$

oder

(5) $$g = 4t a'^3 + 3pM',$$

wo

(6) $$0 \leqq a' < 3p .$$

Ich behaupte, es läßt sich stets erfüllen

(7) $$g = 4ta^3 + 3pM ,$$

wo

(8) $$0 \leqq a < 6p ,$$

M eine positive ganze Zahl ist und der Bedingung genügt

(9) M verschieden von $2 \cdot 4^\sigma (8k + 7)$.

Aus (3) und (7) mit der Nebenbedingung (8) ergibt sich

(10) $$0 \leqq M \leqq (\tfrac{4}{3} 6^3 t + \tfrac{1}{3}) p^3 .$$

Wäre in (5) M' verschieden von $2 \cdot 4^\sigma (8k+7)$, so kann ich einfach $M' = M$ setzen, da dann $a' = a$ die Bedingung (7) erfüllt. Hat dagegen M eine der Gestalten $2(8k+7)$ oder $2 \cdot 4^\sigma (8k+7)$, $\sigma = 1, 2, \ldots$, so kann ich a' durch $a = a' + 3p$ ersetzen und muß statt M' eine andere Größe setzen, die ich M nennen will, nämlich

$$M = M' - 12t(a'^2 + 3a'p + 3p^2).$$

Diese a und M erfüllen dann die Bedingungen (8) und (9). Es ist $a = a' + 3p$ infolge (6) in den Grenzen

$$0 < a < 6p$$

und auch

$$M \text{ verschieden von } 2 \cdot 4^\sigma (8k+7).$$

Hat nämlich M' die Gestalt $2(8k+7)$, so ist

$$\left.\begin{aligned} M &= 2(8k+7) - 12t(a'^2 + 3a'p + 3p^2) \\ &\equiv 2(8k+7) - 12 \\ &\equiv 2 \end{aligned}\right\} \pmod 8.$$

In diesem Falle ist M verschieden von

$$2 \cdot 4^\sigma (8k+7) \equiv 6 \text{ oder } 0 \pmod 8, \qquad \text{wo } \sigma = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wenn andrerseits $M' = 2 \cdot 4^\sigma \cdot (8k+7)$, $\sigma \geqq 1$, ist, wird

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot 4^\sigma (8k+7) - 12 \pmod 8 \\ &\equiv 4\,(2 \cdot 4^{\sigma-1}(8k+7) - 3). \end{aligned}$$

D. h. M ist das 4fache einer ungeraden Zahl, daher verschieden von $2 \cdot 4^\sigma \cdot (8k+7)$, $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$, was zu beweisen war.

Wir gehen zurück auf die Gleichung (2). Aus ihr folgt:

$$h = 2t^2 (g + (1^3 + 1^3 + 2^3) t^4 p^3) \tag{11}$$

und nach (7)

$$\begin{aligned} h &= 2t^2 (4ta^3 + 3pM + (1^3 + 1^3 + 2^3) t^4 p^3) \\ &= 2^3 t^3 a^3 + 2(1^3 + 1^3 + 2^3) t^6 p^3 + 2 \cdot 3t^2 pM. \end{aligned} \tag{12}$$

Da M der Bedingung (9) genügt, gilt nach § 4, II:

$$M = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2$$

in ganzen Zahlen.

Folglich kann ich setzen:

$$\left.\begin{aligned} h &= (2ta)^3 + 2(1^3 + 1^3 + 2^3)(t^2 p)^3 + 2 \cdot 3 (t^2 p)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2) \\ &= (2ta)^3 + (t^2 p + \alpha_1)^3 + (t^2 p + \alpha_2)^3 + (2t^2 p + \alpha_3)^3 \\ &\qquad + (t^2 p - \alpha_1)^3 + (t^2 p - \alpha_2)^3 + (2t^2 p - \alpha_3)^3 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Demnach ist h in sieben Kuben zerlegt, von denen die ersten vier selbstverständlich positiv sind. Auch die drei letzten werden > 0, wenn wir voraussetzen:

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 \leqq t^2 p \\ \alpha_2 \leqq t^2 p \\ \alpha_3 \leqq 2t^2 p\,. \end{array}\right.$$

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn ich

$$(15)\qquad M = \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + 2\alpha_3{}^2 < t^4\, p^2$$

von vornherein annehme. Die Gültigkeit von (15) kann ich erreichen, wenn ich berücksichtigte, daß nach (10)

$$M < (\tfrac{4}{3}\,6^3\, t + \tfrac{1}{3})\, p^2,$$

und nun t der Bedingung unterwerfe

$$(\tfrac{4}{3}\,6^3\, t + \tfrac{1}{3})\, p^2 < t^4\, p^2,$$

$$\text{d. h. } (16)\qquad \tfrac{4}{3}\,6^3\, t + \tfrac{1}{3} < t^4\,.$$

Und das ist erfüllt, wenn wir — wie im Lehrsatz angegeben — $t \geqq 7$ annehmen.

Nach diesem Lehrsatz sind womöglich die Zahlen nicht g_7 (d. h. in 7 oder weniger Kuben zerlegbar), die ungerade sind, das ist $\frac{1}{2}$ aller Zahlen, und von den geraden Zahlen solche, die weder durch 7^2, 11^2, 13^2, noch durch das Quadrat der andern größeren Primzahlen teilbar sind, d. i. wieder $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{13^2})\ldots$ von allen ganzen Zahlen. Wenn nun $C_7(x)$ die Anzahl der Zahlen g_7 von O bis x bedeutet, so ist $x - C_7(x)$ die Anzahl aller Zahlen bis x, die keine g_7 sind. Mit beliebiger Annäherung muß dann sein

$$(17)\qquad x - C_7(x) \leqq x\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{13^2})\ldots\right\}.$$

Das Produkt $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7^2})\ldots$ konvergiert gegen einen *von Null verschiedenen Wert,* weil die Reihe $\frac{1}{7^2}, \frac{1}{11^2}, \frac{1}{13^3}, \ldots$ auch konvergent ist. Mit Berücksichtigung der Primzahlen bis 73 ergibt sich folgende Annäherung

$$(18)\qquad (1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})\ldots \sim 0{,}9521,$$

daher

$$(19)\qquad x - C_7(x) \leqq x \cdot 0{,}9760,$$

folglich

$$\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} \leqq 1 - 0{,}9760 = 0{,}024\,.$$

Baer[3]) fand als untere Abschätzung 0,1805, indem er im Wesentlichen 78 Restklassen modulo 432 zerlegte. Da die von mir aufgestellten Zahlklassen mit den Baerschen Ergebnissen nur teilweise zusammenfallen, könnte man es versuchen, beide Resultate zusammenzufassen. Das liefert aber keine wesentliche Erhöhung von 0,1805. Eine viel günstigere Abschätzung von $\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x}$ werden wir erhalten, wenn wir auf Bestimmung von Zahlklassen, die g_7 sind, verzichten, vielmehr in einer hinreichend langen Folge von Zahlen nur das Vorhandensein von möglichst vielen g_7 feststellen wollen.

Kapitel 3. Eine neue Abschätzung von $\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x}$.

§ 6. Ungerade Zahlen g_7.

Im Folgenden werden mir zunächst abschätzen, der wievielte Teil aller ungeraden Zahlen zuverlässig eine Darstellung durch 7 Kuben gestattet. Dann wieviel g_7 die Zahlen enthalten, die das Doppelte von ungeraden, entsprechend solche Zahlen, die das Vierfache ungerader Zahlen sind, zum Schluß die durch 8 teilbaren Zahlen. Die gefundenen Einzelergebnisse werden dann zu einem Gesamtergebnis zusammengefaßt.

Nach dem Hilfssatz § 2 kann ich $m = 6 + 58$ und ε als *hinreichend kleine* aber feste positive Größe annehmen. Dann existieren zu jeder hinreichend großen ungeraden Zahl $h = 2k + 1$ stets Primzahlen $p \equiv 2 \pmod 3$, die den Ungleichungen

(1) $$(6 + 58 - \varepsilon)p^3 < h < (6 + 58)p^3$$

genügen. Eine dieser Primzahlen p halte ich fest und lasse nun h in den angegebenen Grenzen alle ungeraden Werte annehmen. h zerlege ich auf folgende drei Arten:

(2) $h = 2k + 1 = 2g_1 + 1 + 58p^3 = 2g_1 + 1 + 2(1^3 + 1^3 + 3^3)p^3$,

(3) $h = 2k + 1 = 2g_2 + 1 + 34p^3 = 2g_2 + 1 + 2(1^3 + 2^3 + 2^3)p^3$,

(4) $h = 2k + 1 = 2g_3 + 1 + 6p^3 = 2g_3 + 1 + 2(1^3 + 1^3 + 1^3)p^3$.

Dann liegen $2g_1+1, 2g_2+1, 2g_3+1$ in folgenden Schranken:

(5) $\qquad (6-\varepsilon)p^3 < 2g_1+1 < 6p^3,$

(6) $\qquad (30-\varepsilon)p^3 < 2g_2+1 < 30p^3,$

(7) $\qquad (58-\varepsilon)p^3 < 2g_3+1 < 58p^3.$

Ausgehend von den drei Formeln (2) (3) (4) will ich die h in sieben positive Kuben zerlegen. In jedem der drei Fälle werden sich Restklassen $h \bmod. 3p$ herausstellen, deren Zahlen zum großen Teil g_7 sind. Da nun jede Restklasse *eine* bestimmte Zahl a entspricht, die aus der Kongruenz

$$h \equiv a^3 \qquad (mod.\ 6p)$$

hervorgeht und der Bedingung

$$O \leqq a < 6p$$

genügt und wir weiterhin feststellen werden, daß die aus den drei verschiedenen Formeln gefundenen h lauter verschiedene a liefern, so ergibt jede neue Zerlegung neue Zahlklassen h *modulo* $6p$. Die aus (2) gefundene Anzahl von g_7 können wir durch die Resultate von (3) und (4) erhöhen.

In Hinblick auf (2) kann ich zunächst zerlegen

(8) $\qquad 2g_1+1 = a_1^3 + 6pX;$

setzen wir nämlich im Hilfssatz § 3 $m=6p$, $c=1$, so leuchtet die Erfüllbarkeit von

$$2g_1+1 \equiv a_1^3 \qquad (mod.\ 6p.)$$

ein. (8) soll aber folgenden Nebenbedingungen genügen

(9) $\qquad O \leqq X \leqq p^2$

und

(10) $\qquad X = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2.$

Dann wird nämlich:

(11) $\qquad 2k+1 = a_1^3 + (p+\alpha_1)^3 + (p+\alpha_2)^3 + (3p+\alpha_3)^3$
$\qquad\qquad + (p-\alpha_1)^3 + (p-\alpha_2)^3 + (3p-\alpha_3)^3$

Auch die letzten drei Kuben sind positiv, da aus (9) und (10)

$$\alpha_1 \leqq p,$$
$$\alpha_2 \leqq p,$$
$$\alpha_3 < 3p$$

folgt. Diese Zerlegung gestatten aber die $2g_1+1$ nur zum Teil, weil die Bedingungen (9) und (10) nicht immer erfüllbar sind.

Sei $2g_1+1$ irgend eine der ungeraden Zahlen in den Grenzen (5), so durchläuft a_1 mit $2g_1+1$ in Rücksicht auf (8) und im Sinne

vom Hilfssatz § 3 alle *ungeraden* Restklassen *modulo* $6p$. a_1, das wir immer durch die Schranken

$$(12) \qquad O \leqq a_1 < 6p$$

einschließen können, soll eine weitere Einschränkung erfahren durch die Bestimmung

$$(13) \qquad O \leqq a_1 \leqq \sqrt[3]{6-\varepsilon}\, p.$$

Aus (8) und (5) folgt dann nämlich

$$(14) \qquad O \leqq X \leqq p^2,$$

d. h. die Gleichung (9) ist erfüllt. Bedingung (9) erfüllen von den $\frac{6}{2}p$ ungeraden Restklassen (*mod.* $6p$) $\frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{2}p$ Klassen. In einer Folge von Zahlen $2g_1 + 1$:

$$2g_1' + 1, \quad 2g_1' + 3, \ldots \quad , 2g_1' + 6p - 1$$

erfüllt also der $\frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{2}\, p : \frac{6}{2}p = \frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{6}$ Teil die Bedingung (9). D. h. in den hinreichend weiten Grenzen (5) gestattet beliebig angenähert der $\frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{6}$ Teil aller $2g_1 + 1$ die Zerlegung

$$(15) \qquad 2g_1 + 1 = a_1^3 + 6p\,X,$$

indem

$$(16) \qquad O \leqq X \leqq p^2$$

gilt. Um die Bedingung (10) zu befriedigen, heben wir die $2g_1 + 1$ von einer der brauchbaren Restklassen heraus

$$2g_1 + 1 = 2g_1' + 1,\ 2g_1' + 1 + 6p,\ 2g_1' + 1 + 2 \cdot 6p, \ldots$$

Diese Reihe kann hinreichend lang werden, da die Differenz der in (5) aufgestellten Grenzen proportional p^3 ist. Dieser Folge entsprechen nun nach (15)

$$X = X',\ X' + 1,\ X' + 2, \ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun die letzte Reihe hinreichend lang ist, dann sind nach § 4, V d beliebig angenähert $\frac{7}{8}$ der X von der Form $a_1^2 + a_2^2 + 3a_3^2$. D. h. in allen Restklassen der Zahlen $2g_1 + 1$ modulo $6p$, welche die Bedingung (9) erfüllen, sind annähernd $\frac{7}{8}$ aller Zahlen so beschaffen, daß auch die Bedingung (10) befriedigt wird. Demnach genügt von allen Zahlen $2g_1 + 1$ in den Grenzen (5) beliebig angenähert der $\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{6}$ Teil die Bedingungen (9) und (10).

Nun wird

$$(17) \qquad 2g_1 + 1 = a_1^3 + 6pX = a_1^3 + 6p\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2)$$

Jedem $2g_1 + 1$ in den Grenzen (5) entspricht ein h in den gleich weiten Grenzen (1) und umgekehrt. Unter Zugrundelegung der Gleichung (2) können wir nun leicht übertragen und sagen:

Derselbe Prozentsatz aller $h = 2k + 1$ in den Grenzen (1) gestattet folgende Zerlegung:

$$(18) \quad \begin{cases} h = a_1^3 + 6p\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2) + 2p^3\,(1^3 + 1^3 + 3^3) \\ \quad = a_1^3 + (p + \alpha_1)^3 + (p + \alpha_2)^3 + (3p + \alpha_3)^3 \\ \qquad + (p - \alpha_1)^3 + (p - \alpha_2)^3 + (3p - \alpha_3)^3 . \end{cases}$$

Das sind sieben Kuben. Da aus den Bedingungen (9) und (10) folgt

$$(19) \qquad O \leqq \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 \leqq p^2 ,$$

so gilt erst recht:

$$(20) \quad \begin{cases} p \leqq \alpha_1 , \\ p \leqq \alpha_2 , \\ 3p \leqq \alpha_3 . \end{cases}$$

Welche Zahlen a der Kongruenz $h \equiv a^3 \pmod{6p}$ entsprechen diesen Zahlen h?

Es war $2g_1 \equiv a_1^3 \pmod{6p}$.

Bilde ich nun zu $h = 2g_1 + 1 + 58p^3$ die Kongruenz

$$(21) \qquad h \equiv a^3 \pmod{6p} ,$$

indem

$$(22) \qquad O \leqq a < 6p ,$$

so besteht — das kann man leicht zeigen — zwischen a und a_1 die Beziehung:

$$(23) \qquad a = a_1 + 4p .$$

Infolge (13) liegen die in Betracht kommenden Restklassen a in den Schranken

$$(24) \qquad 4p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6 - \varepsilon} + 4)\,p .$$

Wir erhalten somit das Ergebnis:

Von allen Zahlen $h = 2k + 1$ in den Grenzen (1) ist beliebig angenähert der $\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6 - \varepsilon}}{6}$ Teil von der Beschaffenheit g_7. Allen diesen h entsprechen a in den Grenzen

$$(24) \qquad 4p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6-\varepsilon}+4)\,p\,.$$

Die beiden anderen Zerlegungen knüpfen an (3) und (4) an. Sie seien nur skizzenhaft behandelt; im Wesentlichen handelt es sich um Uebertragung der hier ausgeführten Gedankengänge auf andere Zahlenverhältnisse.

Ich zerlege zweitens $h = 2k+1$ nach der Gleichung (3) und betrachte die Zahlen $2g_2+1$, die in den Grenzen (6) liegen. Nach § 3 kann ich wieder erfüllen

$$(25) \qquad 2g_2+1 = a_2{}^3 + 6pX\,.$$

Um eine Zerlegung in sieben positive Kuben zu gewährleisten, will ich die Bedingungen

$$(26) \qquad O \leqq X \leqq p^2\,,$$

$$(27) \qquad X = \alpha_1{}^2 + 2\alpha_2{}^2 + 2\alpha_3{}^2$$

zu erfüllen suchen. (26) wird erfüllt, wenn ich festsetze

$$(28) \qquad \sqrt[3]{24}\,p \leqq a^2 \leqq \sqrt[3]{30-\varepsilon}\;\cdot\; p\,.$$

Dann fällt nämlich in Rücksicht auf (6) X in die [durch (26)] verlangten Grenzen. D. h. $\frac{\sqrt[3]{30-\varepsilon}-\sqrt[3]{24}}{2}\,p$ der $\frac{6}{2}\,p$ ungeraden Restklassen *mod.* $6p$ sind für diese Bedingung geeignet. D. i. der $\frac{\sqrt[3]{30-\varepsilon}-\sqrt[3]{24}}{6}$ Teil. Ich überzeuge mich leicht, daß in jeder brauchbaren Restklasse der $2g_2+1$ beliebig angenähert $\frac{10}{12}$ die Erfüllung von (27) gestatten.

Nämlich den Zahlen einer Restklasse

$$2g_2+1 = 2g_2{}'+1,\ 2g_2{}'+1+6p,\ 2g_2{}'+1+2\cdot 6p,\ldots$$

entsprechen

$$X = X',\ X'+1,\ X'+2,\ldots..$$

In dieser Reihe sind nämlich nach § 4, Vc asymptotisch angenähert $\frac{10}{12}$ von der Form $\alpha_1{}^2+2\alpha_2{}^2+2\alpha_3{}^2$. Das alles besagt: Annähernd $\frac{10}{12}\cdot\frac{\sqrt[3]{30-\varepsilon}-\sqrt[3]{24}}{6}$ der Zahlen $2g_2+1$ gestattet die Zerlegung (25) mit den Bedingungen (26) und (27). Nun wird:

$$(29) \qquad \begin{aligned} 2g_2+1 &= a_2{}^3 + 6pX \\ &= a_2{}^3 + 6p\ (\alpha_1{}^2+2\alpha_2{}^2+2\alpha_3{}^2). \end{aligned}$$

Jedem $2g_2+1$ in den Grenzen (6) entspricht ein h in gleich weiten Grenzen (1) und umgekehrt.

Unter Zugrundelegung der Gleichung (3) können wir sagen, daß derselbe Prozentsatz aller $h = 2k + 1$ in den Grenzen (1) folgendermaßen zerfällbar ist:

$$(30) \quad h = a_2^3 + 6p\,(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2) + 2p^3\,(1^3 + 2^3 + 2^3)$$
$$= a_2^3 + (p + \alpha_1)^3 + (2p + \alpha_2)^3 + (2p + \alpha_3)^3$$
$$+ (p - \alpha_1)^3 + (2p - \alpha_2)^3 + (2p - \alpha_3)^3.$$

Auch die drei letzten Kuben sind wieder positiv, da infolge (26), (27)

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha_1 \leqq p, \\ \alpha_1 < 2p, \\ \alpha_3 < 2p \end{cases}$$

sein müssen.

Wir stellen fest, welche Zahlen a der Kongruenz

$$h \equiv a^3 \pmod{6p}$$

diesen h entsprechen. Es war

$$(32) \quad 2g_2 + 1 = a_2^3 \pmod{6p}.$$

Unterwerfe ich wieder

$$(33) \quad h = 2g_2 + 1 + 34p^3$$

der Kongruenz

$$(34) \quad h \equiv a^3 \pmod{6p}$$

und verlange $O \leqq a < 6p$, so müssen infolge (33) a_2 und a in folgender Beziehung stehen

$$(35) \quad a = a_2 - 2p.$$

Aus der Festsetzung (28) für a_2 folgt für a

$$(\sqrt[3]{24} - 2)\,p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{30 - \varepsilon} - 2)\,p.$$

Fassen wir die neuen Ergebnisse zusammen:

Von allen ungeraden Zahlen h in den Grenzen (1) *ist mit beliebiger Annäherung der* $\frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{30 - \varepsilon} - \sqrt[3]{24}}{6}$ *Teil durch Summen von 7 Kuben darstellbar und zwar müssen diesen h Zahlen a entsprechen, die in den Schranken*

$$(36) \quad (\sqrt[3]{24} - 2)\,p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{30 - \varepsilon} - 2)\,p$$

sich befinden.

Anschließend an Gleichung (4) will ich die dritte Zerlegung vornehmen. $2g_3 + 1$ zerspalte ich wieder

$$(37) \quad 2g_3 + 1 = a_3^3 + 6pX$$

und fordern die Erfüllung der Bedingungen

$$(38) \quad O \leqq X \leqq p^2$$

und

$$(39) \qquad X = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

X genügt der Bedingung (38) immer, wenn ich von a_3 voraussetze:

$$(40) \qquad \sqrt[3]{52}\, p \leqq a_3 \leqq \sqrt[3]{58-\varepsilon}\, p\,.$$

Dann folgt nämlich mit Rücksicht auf (4) die Bedingung (38) für X.

Nach § 4, V b sind von den X jedesmal angenähert $\frac{10}{12}$ von der Gestalt $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$. Demnach sind fast $\frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{58-\varepsilon} - \sqrt[3]{52}}{6}$ der Zahlen $2g_3 + 1$ nach (37) und (39) so darstellbar

$$2g_3 + 1 = a_3^3 + 6p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2).$$

In den Grenzen (1) sind infolge (4) die entsprechenden $h = 2k+1$ folgendermaßen zerlegbar:

$$(41) \quad \begin{cases} h = 2k+1 = a_3^3 + 6p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2p^3(1^3 + 1^3 + 1^3) \\ \qquad = a_3^3 + (p+\alpha_1)^3 + (p+\alpha_2)^3 + (p+\alpha_3)^3 \\ \qquad\quad + (p-\alpha_1)^3 + (p-\alpha_2)^3 + (p-\alpha_3)^3\,. \end{cases}$$

Alle Kuben — auch die drei letzten — sind positiv; denn die Bedingungen (38) und (39) haben zur Folge

$$(42) \quad \begin{cases} p \geqq \alpha_1\,, \\ p \geqq \alpha_2\,, \\ p \geqq \alpha_3\,. \end{cases}$$

Welche von den Zahlen a in den Grenzen

$$O \leqq a \leqq 6p$$

kommen für diese Zahlen h in Betracht?

Es ist nach (4)

$$\begin{aligned} h &= 2g_3 + 1 + 6p^3 \\ &\equiv 2g_3 + 1 \qquad (mod.\ 6p) \\ &\equiv a_3^3 \qquad \text{infolge (37).} \end{aligned}$$

Es soll werden

$$h \equiv a^3 \qquad (mod.\ 6p).$$

Folglich $a \equiv a_3 \qquad (mod.\ 6p)$.

Da $\sqrt[3]{52}\, p \leqq a_3 \leqq \sqrt[3]{58-\varepsilon}\, p$, folgt:

$$(43) \qquad \sqrt[3]{52}\, p \leqq a \leqq \sqrt[3]{58-\varepsilon}\, p.$$

Wir fassen wieder zusammen:

Von allen ungeraden Zahlen h in den Schranken (1) *läßt sich fast der* $\frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{58-\varepsilon} - \sqrt[3]{52}}{6}$ *Teil durch 7 Kuben darstellen. Diesen*

h entsprechen Zahlen a in folgenden Grenzen

$$(43) \qquad \sqrt[3]{52}\, p \leqq a \leqq \sqrt[3]{58-\varepsilon}\, p .$$

Ich will zeigen, daß die durch die drei Zerlegungen erfaßten h miteinander nichts gemein haben, nämlich, daß durch jede Zerlegung andere Restklassen h *modulo* $6p$ erfaßt werden.

Allen $6p$ Restklassen h entsprechen $6p$ Werte a und umgekehrt, nämlich

$$(44) \qquad 0 \leqq a < 6p .$$

Die a, die den Zahlen h der ersten Zerlegung entsprachen, lagen in den Grenzen

$$4p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6-\varepsilon}+4)p$$

d. h.

$$(45) \qquad 4p \leqq a < 5{,}82\, p ,$$

wenn wir ε hinreichend klein annehmen. Den h der zweiten Zerlegung entsprachen a, sodaß

$$(\sqrt[3]{24}-2)p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{30-\varepsilon}-2)p ,$$

d. h.

$$(46) \qquad 0{,}88\, p < a < 1{,}11\, p .$$

Den h der dritten Zerlegung entsprachen a der Art, daß

$$\sqrt[3]{52}\, p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{58-\varepsilon})\, p ,$$

d. h.

$$(47) \qquad 3{,}74\, p < a < 3{,}88\, p .$$

Die a von (45) (46) (47) nehmen ganz *getrennte Teilintervalle* von (44) ein. Es folgt daraus: Jede neue Zerlegung liefert neue Zahlen h. Wir können die einzelnen Teilbeträge zusammenzählen und erhalten:

„In den Grenzen (1) sind beliebig angenähert

$$\tfrac{7}{8}\,\frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{6}+\tfrac{10}{12}\,\frac{\sqrt[3]{30-\varepsilon}-\sqrt[3]{24}}{6}+\tfrac{10}{12}\,\frac{\sqrt[3]{58-\varepsilon}-\sqrt[3]{52}}{6}$$

aller ungeraden Zahlen g_7."

Ueberschreitet $h = 2k+1$ mit dem Werte $h_1 = 2k_1+1$ die obere Grenze in (1), so wähle ich die größte Primzahl p_1, die der Umgleichung

$$(6+58-\varepsilon)\,p_1{}^3 < h_1 < (6+58)\,p_1{}^3$$

Genüge leistet. In diesem neuen Gebiet lasse ich wieder h_1 alle

ungeraden Werte annehmen. Da $p_1 > p$, so ist dieses Intervall größer als das durch (1) definierte. Im neuen Intervalle gelten dieselben Gesetze. Von h_1 und p_1 gehe ich über zu h_2 und p_2, h_3 und p_3 u. s. w., überall gilt dasselbe. Fasse ich alle Intervalle zusammen und vernachlässige die dem Intervall (1) vorhergehenden endlichen Zahlen, so ergibt sich: Angenähert

$$\tfrac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{6} + \tfrac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{30-\varepsilon} - \sqrt[3]{24}}{6} + \tfrac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{58-\varepsilon} - \sqrt[3]{52}}{6}$$

aller ungeraden Zahlen sind g_7.

ε war zwar eine feste Größe, diese kann ich aber beliebig klein definieren. Wir können daher den Satz aufstellen:

Von allen ungeraden Zahlen ist asymptotisch angenähert der

$$\tfrac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{6} + \tfrac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{30} - \sqrt[3]{24}}{6} + \tfrac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{58} - \sqrt[3]{52}}{6}$$

Teil, ganz sicher also der 0,3151 Teil derselben, in Summen von sieben Kuben (und weniger) zerlegbar.

Anmerkung: Es liegt folgende Frage nahe: Wenn wir die Primzahl p durch eine andere p' ersetzt hätten, sodaß $\frac{p'}{p} = 1$ bis auf Größen niederer Ordnung, und nun h in die Grenzen

$$(1') \quad (6 + 58 - \varepsilon)\, p'^3 < h < (6 + 58)\, p'^3$$

verlegt hätten, so würden die Grenzen (1') im Wesentlichen mit (1) zusammenfallen. „Es fragt sich nun, ob die Zahlen h, welche in den brauchbaren Restklassen *mod.* $6p'$ liegen, im Wesentlichen mit den entsprechenden Restklassen *mod.* $6p'$ zusammenfallen, oder ob auf beide Arten wesentlich verschiedene Zahlen g_7 erzeugt werden." Die Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen ist deswegen so schwer, weil nach unserem Verfahren nie entschieden werden kann, ob eine vorliegende Zahl g_7 ist, noch in welchen Abständen die Zahlen g_7 aufeinander folgen.

§ 7. Zahlen $h = 2(2k+1)$, die g_7 sind.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen kann ich fast genau auf die Zahlen h übertragen, die das Doppelte von ungeraden Zahlen sind.

Es existieren da zu jeder solchen Zahl $h = 2(2k+1)$ Primzahlen $p \equiv 2 \pmod 3$, die den Ungleichungen

$$(1) \qquad (6 + 58 - \varepsilon)\, p^3 < h < (6 + 58)\, p^3$$

genügen. h zerlege ich hier auf folgende Arten:

$$(2) \qquad h = 2(2k+1) = 4g_1 + 2 + 58p^3 = 4g_1 + 2 + 2(1^3 + 1^3 + 3^3)\, p^3,$$

$$(3) \qquad h = 2(2k+1) = 4g_2 + 2 + 34p^3 = 4g_2 + 2 + 2(1^3 + 2^3 + 2^3)\, p^3,$$

$$(4) \qquad h = 2(2k+1) = 4g_3 + 2 + 6p^3 = 4g_3 + 2 + 2(1^3 + 1^3 + 1^3)\, p^3,$$

betrachte statt der $2g_1 + 1$, $2g_2 + 1$, $2g_3 + 1$ des vorigen Paragraphen $4g_1 + 2$, $4g_2 + 2$, $4g_3 + 2$ in den Schranken

$$(5) \qquad (6 - \varepsilon)\, p^3 < 4g_1 + 2 < 6p^3,$$

$$(6) \qquad (30 - \varepsilon)\, p^3 < 4g_2 + 2 < 30p^3,$$

$$(7) \qquad (58 - \varepsilon)\, p^3 < 4g_3 + 2 < 58p^3$$

und zerlege diese Zahlen nun weiter. Wir erhalten dreierlei Darstellungen:

$$(8) \qquad h = a_1^3 + (p + \alpha_1)^3 + (p + \alpha_2)^3 + (3p + \alpha_3)^3 + (p - \alpha_1)^3 + (p - \alpha_2)^3 + (3p - \alpha_3)^3,$$

$$(9) \qquad h = a_2^3 + (p + \alpha_1)^3 + (2p + \alpha_2)^3 + (2p + \alpha_3)^3 + (p - \alpha_1)^3 + (2p - \alpha_2)^3 + (2p - \alpha_3)^3,$$

$$(10) \qquad h = a_3^3 + (p + \alpha_1)^3 + (p + \alpha_2)^3 + (p + \alpha_3)^3 + (p - \alpha_1)^3 + (p + \alpha_2)^3 + (p - \alpha_3)^3.$$

Unter den früheren Bedingungen sind wieder sämtliche Kuben positiv.

Hier handelt es sich um Restklassen $h \equiv a^3 \pmod{6p}$, deren entsprechende a von dem Intervalle

$$(11) \qquad 0 \leqq a \leqq 6p$$

folgende verschiedene Teilgebiete einnehmen:

$$(12) \qquad 4p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6 - \varepsilon} + 4)p,$$

$$(13) \qquad (\sqrt[3]{24} - 2)p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{30 - \varepsilon} - 2)p,$$

$$(14) \qquad \sqrt[3]{52}\, p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{58 - \varepsilon})p.$$

Der Unterschied gegen die früheren Betrachtungen ist nun folgender: Damals handelte es sich in den (11), (12), (13), (14) entsprechenden Intervallen nur um die ungeraden Zahlen a, welche den ungeraden h entsprachen. Hier entsprechen

$$h = 4k' + 2,\ 4k' + 6, \ldots\ ,\ 4k' + 2 \cdot 6p - 2$$

sämtliche geraden Restklassen $a = 2a'$ *modulo* $6p$. Wir erhalten so ein ganz entsprechendes Ergebnis:

Von allen Zahlen $h = 2(2k + 1)$, die also das Doppelte ungerader Zahlen sind, ist mit asymptotischer Annäherung der

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6}}{6} + \frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{24}}{6} + \frac{10}{12} \frac{\sqrt[3]{58} - \sqrt[3]{52}}{6}$$

Teil, ganz sicher aber der 0,3151 Teil von der Art g_7.

§ 8. Zahlen $h = 4(2k + 1)$, die g_7 sind.

Sei h eine der Zahlen, die das Vierfache von ungeraden sind, und zwar beliebig aber hinreichend groß, so können wir

$$h = 4(2k + 1)$$

in folgende Grenzen legen

$$(1) \qquad (464 + 48 - \varepsilon)p^3 < h < (464 + 48)p^3,$$

wobei p und ε die analoge Bedeutung haben wie im § 6. Hier zerlege ich h folgendermaßen:

(2)
$$h = 4(2k+1) = 4(2g_1 + 1) + 464p^3 = 4(2g_1 + 1) + 2(2^3 + 2^3 + 6^3)p^3$$

(3)
$$h = 4(2k+1) = 4(2g_2 + 1) + 272p^3 = 4(2g_2 + 1) + 2(2^3 + 4^3 + 4^3)p^3$$

(4)
$$h = 4(2k+1) = 4(2g_3 + 1) + 48p^3 = 4(2g_3 + 1) + 2(2^3 + 2^3 + 2^3)p^3 .$$

Infolge (1) unterliegen dann $2g_1 + 1, 2g_2 + 1, 2g_3 + 1$ folgenden Ungleichungen:

$$(5) \qquad (12 - \tfrac{\varepsilon}{4})p^3 < 2g_1 + 1 < 12p^3 ,$$

$$(6) \qquad (60 - \tfrac{\varepsilon}{4})p^3 < 2g_2 + 1 < 60p^3 ,$$

$$(7) \qquad (116 - \tfrac{\varepsilon}{4})p^3 < 2g_3 + 1 < 116p^3 .$$

Nach dem Hilfssatz § 3 zerlege ich zunächst

$$(8) \qquad 2g_1 + 1 = 2a_1^3 + 3pX .$$

Das ist möglich, weil $c = 2$ und $m = 3p$ relativ prim sind. Für die kommende Zerlegung verlange ich die Erfüllung der Bedingungen:

$$(9) \qquad O \leqq X \leqq 4p^2$$

und

$$(10) \qquad X = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2 .$$

$2g_1 + 1$ an sich kann alle $3p$ Restklassen *modulo* $3p$ durchlaufen, ihm entspricht dann

$$(11) \qquad O \leqq a_1 < 3p .$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (5) wird aber (9) stets dann erfüllt werden, wenn ich von vornherein

$$(12) \qquad O \leqq a_1 \leqq \sqrt[3]{6 - \tfrac{\varepsilon}{8}}\, p$$

festlege. D. h. Beliebig angenähert $\sqrt[3]{6 - \frac{\varepsilon}{8}} \cdot p$ von den $3p$ Restklassen erfüllen die Ungleichung (9), d. i. der $\frac{\sqrt[3]{6 - \frac{\varepsilon}{8}}}{3}$ Teil aller Klassen. Von den X sind wieder angenähert $\frac{7}{8}$ durch $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2$ darstellbar. D. h. angenähert $\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6 - \frac{\varepsilon}{8}}}{3}$ aller $2g_1 + 1$ erfüllen (8) unter den Bedingungen (9) und (10).

Demnach gestattet derselbe Anteil von allen h folgende Zerlegung:

$$(13) \quad \begin{cases} h = 4(2g_1 + 1) + 2(2^3 + 2^3 + 6^3)p^3 \\ \quad = 4(2a_1^3 + 3p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2)) + 2(2^3 + 2^3 + 6^3)p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + 2 \cdot 3 \cdot 2p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_3^2) + 2(2^3 + 2^3 + 6^3)p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + (2p + \alpha_1)^3 + (2p + \alpha_2)^3 + (6p + \alpha_3)^3 \\ \qquad\quad + (2p - \alpha_1)^3 + (2p - \alpha_2)^3 + (6p - \alpha_3)^3 . \end{cases}$$

Da in Rücksicht auf (9) und (10)

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_1 \leqq 2p , \\ \alpha_2 \leqq 2p , \\ \alpha_3 < 6p , \end{cases}$$

so sind auch die drei letzten Kuben positiv. Bilde ich zu diesen h die entsprechenden a vermöge der Kongruenz

$$(15) \qquad \frac{h}{4} \equiv a^3 \qquad (mod.\ 3p) ,$$

so nehmen diese a von dem Intervalle

$$O \leqq a < 3p$$

das Teilintervall

$$p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6 - \tfrac{\varepsilon}{8}} + 1)p$$

ein. Wir erhalten das Ergebnis:

Beliebig angenähert $\frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{6-\varepsilon}}{3}$ *aller Zahlen* $h = 4(2k+1)$ *in den Grenzen (1) sind* g_7. *Wenn wir allen Zahlen h die ganzen Zahlen a in dem Intervalle*

$$(16) \qquad O \leqq a < 3p$$

zuordnen, so entsprechen diesen h die a in dem Teilintervall

$$(17) \qquad p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{6-\tfrac{\varepsilon}{8}} + 1)\, p.$$

Von (3) ausgehend zerlege ich zweitens

$$(18) \qquad 2g_2 + 1 = 2a_2^{\,3} + 3pX,$$

wo wieder

$$(19) \qquad O \leqq X \leqq 4p^2,$$

dagegen

$$(20) \qquad X = \alpha_1^{\,2} + 2\alpha_2^{\,2} + 2\alpha_3^{\,2}$$

sein soll. Zur Erfüllung von (19) müssen wir in Rücksicht auf (6)

$$(21) \qquad \sqrt[3]{24}\, p \leqq a_2 \leqq \sqrt[3]{30-\tfrac{\varepsilon}{8}}\, p$$

voraussetzen. Von den $3p$ Restklassen das h sind beliebig angenähert $(\sqrt[3]{30-\frac{\varepsilon}{8}} - \sqrt[3]{24})\, p$ brauchbar. Von den X erfüllen asymptotisch angenähert $\frac{10}{12}$ die Bedingung (20). Es folgt:

Annähernd $\frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{30-\frac{\varepsilon}{8}} - \sqrt[3]{24}}{3}$ *aller h in den Grenzen (1) läßt sich folgendermaßen in sieben Kuben zerlegen.*

$$(22) \quad \begin{cases} h = 4(2g_2+1) + 2(2^3+4^3+4^3)\,p^3 \\ \quad = 4(2a_1^{\,3} + 3p(\alpha_1^{\,2} + 2\alpha_2^{\,2} + 2\alpha_3^{\,2})) + 2(2^3+4^3+4^3)\,p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + 2\cdot 3\cdot 2p(\alpha_1^{\,2} + 2\alpha_2^{\,2} + 2\alpha_3^{\,2}) + 2(2^3+4^3+4^3)\,p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + (2p+\alpha_1)^3 + (4p+\alpha_2)^3 + (4p+\alpha_3)^3 \\ \qquad\quad + (2p-\alpha_1)^3 + (4p-\alpha_2)^3 + (4p-\alpha_3)^3. \end{cases}$$

Alle Kuben sind positiv, da aus (19) und (20)

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha_1 \leqq 2p, \\ \alpha_2 < 4p, \\ \alpha_3 < 4p \end{cases}$$

folgt. Diesen h entsprechen in der Kongruenz

$$(24) \qquad \frac{h}{4} \equiv a^3 \qquad (mod.\ 3p)$$

diejenigen a, welche in den Schranken

$$(25) \qquad (\sqrt[3]{24} - 2)\, p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{30 - \tfrac{\varepsilon}{8}} - 2)\, p$$

liegen.

Ich gehe drittens von (4) aus und zerlege

$$(26) \qquad 2g_3 + 1 = 2a_3^3 + 3pX,$$

stelle dabei aber die Bedingungen

$$(27) \qquad 0 \leqq X \leqq 4p^2,$$

$$(28) \qquad X = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Zur Erfüllung von (27) muß ich in Rücksicht auf (7) verlangen, daß a_3 durch

$$(29) \qquad \sqrt[3]{52}\, p \leqq a_3 \leqq \sqrt[3]{58 - \tfrac{\varepsilon}{8}}\, p$$

beschränkt sei. Der Bedingung (27) genügen also angenähert $\frac{\sqrt[3]{58 - \frac{\varepsilon}{8}} - \sqrt[3]{52}}{3}$ aller h. Asymptotisch $\frac{10}{12}$ aller X befriedigen die Bedingung (28). Ich gelange zu folgendem Ergebnis:

Annähernd $\frac{10}{12} \cdot \frac{\sqrt[3]{58 - \frac{\varepsilon}{8}} - \sqrt[3]{52}}{3}$ *aller h in den Grenzen (1) können folgendermaßen in 7 Kuben zerspalten werden.*

$$(30) \quad \begin{cases} h = 4(2g_3 + 1) + 2(2^3 + 2^3 + 2^3)\, p^3 \\ \quad = 4(2a_1^3 + 3p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)) + 2(2^3 + 2^3 + 2^3)\, p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + 2 \cdot 3 \cdot 2p(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2(2^3 + 2^3 + 2^3)\, p^3 \\ \quad = (2a_1)^3 + (2p + \alpha_1)^3 + (2p + \alpha_2)^3 + (2p + \alpha_3)^3 \\ \qquad\quad + (2p - \alpha_1)^3 + (2p - \alpha_2)^3 + (2p - \alpha_3)^3. \end{cases}$$

Alle sieben Kuben sind positiv, denn infolge (27) und (28) müssen sein

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha_1 \leqq 2p, \\ \alpha_2 \leqq 2p, \\ \alpha_3 \leqq 2p. \end{cases}$$

Diesen Zahlen h entsprechen in der Kongruenz

$$(32) \qquad \frac{h}{4} \equiv a^3 \pmod{3p}$$

diejenigen a, welche in den Grenzen

$$(33) \qquad (\sqrt[3]{52} - 3)\, p \leqq a \leqq (\sqrt[3]{58 - \tfrac{\varepsilon}{8}} - 3)\, p$$

liegen.

Wir werden uns jetzt überzeugen, daß die aus den drei Zerlegungen entspringenden Teilintervalle für a nur zum kleinen Teil ineinander übergreifen.

Die a von der ersten Zerlegung liegen nach (17) in folgenden Grenzen:

$$(34) \quad 1 \cdot p \leqq a \leqq 2{,}8171\, p,$$

wenn wir ε hinreichend klein wählen.

Aus (25) ergibt sich für a:

$$(35) \quad 0{,}8845\, p \leqq a \leqq 1{,}1072\, p.$$

Aus (33) ergibt sich für a:

$$(36) \quad 0{,}7326 \leqq a \leqq 0{,}8708\, p.$$

Wir sehen, daß ein Teil der h, die durch die erste Darstellung zerlegt werden, auch von der zweiten Zerlegung erfaßt wird. Es sind das die h, deren entsprechende a in den Schranken

$$1 \cdot p \leqq a \leqq 1{,}1072\, p$$

sich befinden. Schließen wir diese h von der zweiten Darstellung aus, so werden nach der zweiten Formel allein diejenigen h zerlegt, deren entsprechende a in dem Teilintervall

$$(35') \quad 0{,}8845 \leqq a \leqq 1 \cdot p$$

liegen. Unter dieser Einschränkung werden von jeder Zerlegungsart neue Zahlen h erfaßt. Als Endresultat ergibt sich schließlich:

Von allen ganzen Zahlen der Gestalt $h = 4\,(2k+1)$ gestattet mit asymptotischer Annäherung der

$$\frac{7}{8}\,\frac{\sqrt[3]{6}}{3} + \frac{10}{12}\cdot\frac{1-0{,}8845}{3} + \frac{10}{12}\cdot\frac{\sqrt[3]{58}-\sqrt[3]{52}}{3} \quad \text{Teil,}$$

d. h. sicher mehr als der 0,6004 Teil, Zerlegungen in sieben [oder weniger] positive Kuben.

§ 9. Die Zahlen $h = 8k$, die g_7 sind.

$h = 8k$ sei beliebig, aber hinreichend groß. Setze ich diesmal $m = 384 + 412$, $\varepsilon = 1$, so existieren nach § 2 Primzahlen $p \equiv 2$ (*mod.* 3), sodaß

$$(1) \quad (384 + 512 - 1)p^3 < h < (384 + 512)p^3$$

erfüllt wird. Nun zerlege ich $h = 8k$ in folgender Weise

$$(2) \qquad h = 8g + 512\,p^3 = 8g + 2\,(4^3 + 4^3 + 8^3)\,p^3 .$$

Dann entsprechen der Reihe der h alle aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen g in den Grenzen:

$$(3) \qquad 47p^3 < g < 48p^3 .$$

Nach Hilfssatz § 3 zerlege ich wieder

$$(4) \qquad g = a^3 + 3pX .$$

Es sollen aber noch folgende Bedingungen erfüllt werden

$$(5) \qquad O < X < (4p)^2$$

[d. h. die positive Größe X soll $< 4p^2$ sein] und außerdem X von der Gestalt

$$(6) \qquad X = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 .$$

Berücksichtige ich, daß in (4) stets

$$O \leqq a < 3p$$

angenommen werden kann, so ergibt sich vermittels (3)

$$6{,}6\,p < X < 16p^2 \ :$$

Es sind die Ungleichungen (5) im angegebenen Sinne erfüllt und zwar von *jeder* Restklasse g *modulo* $3p$. Bilden wir wie früher die Reihe

$$X = X',\ X' + 1,\ X' + 2,\ \ldots\ldots ,$$

so ergibt sich nach § 4, Va angenähert $\frac{11}{12}$ aller X von der Form $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2$. Wir gelangen zu dem Resultate:

Angenähert $\frac{11}{12}$ aller den g entsprechenden h in den Grenzen (1) erlauben folgende Zerlegung in 7 Kuben:

Infolge (2), (4) und (6) gilt:

$$\begin{aligned} h &= 8\,(a^3 + 3pX) + 2\,(4^3 + 4^3 + 8^3)\,p^3 \\ &= (2a)^3 + 2\,(4^3 + 4^3 + 8^3)\,p^3 + 6 \cdot 4pX \\ &= (2a)^3 + 2\,(4^3 + 4^3 + 8^3)\,p^3 + 6 \cdot 4p\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_3^2) \\ &= (2a)^3 + (4p + \alpha_1)^3 + (4p + \alpha_2)^3 + (8p + \alpha_3)^3 \\ &\qquad + (4p - \alpha_1)^3 + (4p - \alpha_2)^3 + (8p - \alpha_3)^3 . \end{aligned}$$

Auch die drei letzten Kuben sind positiv, da aus (5) und (6)

$$(8) \qquad \begin{cases} O < \alpha_1 < 4p , \\ O < \alpha_2 < 4p , \\ O < \alpha_3 < 8p \end{cases}$$

folgen. Wir erhalten schließlich den Satz:

Von allen durch 8 teilbaren ganzen Zahlen sind asymptotisch angenähert $\frac{11}{12}$, d. h. sicher mehr als der 0,9166 Teil, in sieben positive Kuben zerlegbar.

§ 10. Zusammenfassung und Abschätzung von $\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x}$.

Die Schlußresultate von § 6 — § 9 stellen wir zusammen.

Durch 7 Kuben sind darstellbar:

Nach § 6:

von allen ungeraden Zahlen der Anteil 0,3151,

das ist der $\frac{0{,}3151}{2} = 0{,}1575$ Teil *aller* ganzen Zahlen.

Nach § 7:

von allen Zahlen $h = 2(2k+1)$ der Anteil 0,3151,

das ist der $\frac{0{,}3151}{4} = 0{,}0787$ Teil *aller* ganzen Zahlen.

Nach § 8:

von allen Zahlen $h = 4(2k+1)$ der Anteil 0,6004,

das ist der $\frac{0{,}6004}{8} = 0{,}0750$ Teil *aller* ganzen Zahlen.

Nach § 9:

von allen durch 8 teilbaren Zahlen der Anteil 0,9166,

das ist der $\frac{0{,}9166}{8} = 0{,}1146$ Teil *aller* ganzen Zahlen.

Summieren wir diese unabhängigen Teilergebnisse, so gelangen wir zu dem neuen Ergebnis:

Mehr als der 0,4258 Teil aller ganzen Zahlen ist durch Summen von sieben oder weniger Kuben darstellbar. Benennen wir wieder mit $C_7(x)$ die Anzahl der g_7 von O bis x, so ergibt sich:

$$\lim_{x=\infty} C_7(x) < 0{,}4258\ x$$

oder

$$\lim_{x=\infty} \frac{C_7(x)}{x} < 0{,}4258.$$

§ 11. Schluß.

Bezeichnen wir mit h_ν die Zahlen, die durch ν und *nicht weniger* als ν Kuben darstellbar sind, und war g_ν eine Zahl, die in ν oder weniger Kuben zerlegt werden kann, so sind zwar die $g_\nu - 1$, $g_\nu - 2$, ..., h_ν, $h_\nu - 1$, ... in den g_ν enthalten, nicht aber

alle g_ν in den h_ν. Es war uns möglich, Zahlen g_ν, im Besondern g_7, zu diskutieren. Viele g_ν sind womöglich noch durch weniger als ν Kuben darstellbar. Leider können wir $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \ldots + \alpha_\nu^3$ unmittelbar als kubische Form auf ihre Darstellbarkeit nicht untersuchen, sondern sind auf die Hilfe ternärer quadratischer Formen und deren unmittelbaren Darstellungsgesetze angewiesen. Die Tabelle von v. Sterneck[4]) gibt im Intervall 1—40000 an, durch wieviel Kuben mindestens sich jede Zahl in diesem Gebiet darstellen läßt, charakterisiert also die Zahlen h_ν. Wir wollen ihre Resultate graphisch veranschaulichen. Auf der Abcisse tragen wir die Intervalle von 1000 zu 1000 ab, als Ordinaten die Anzahl der im zurückgelegten 1000 enthaltenen h_ν. So erhalten wir Kurven, deren Verlauf zu Vermutungen über allgemeine Gesetze Anlaß gibt.

Als h_9 sind nur die Zahlen 23 und 239 bekannt.

Das größte bekannte h_8 ist 454.

Da in der Tabelle als letzte Zahl h_7 sich 8042 ergibt, sinkt die h_7 Kurve schnell auf Null. Vielleicht gibt es von 8042 ab keine h_7 mehr.

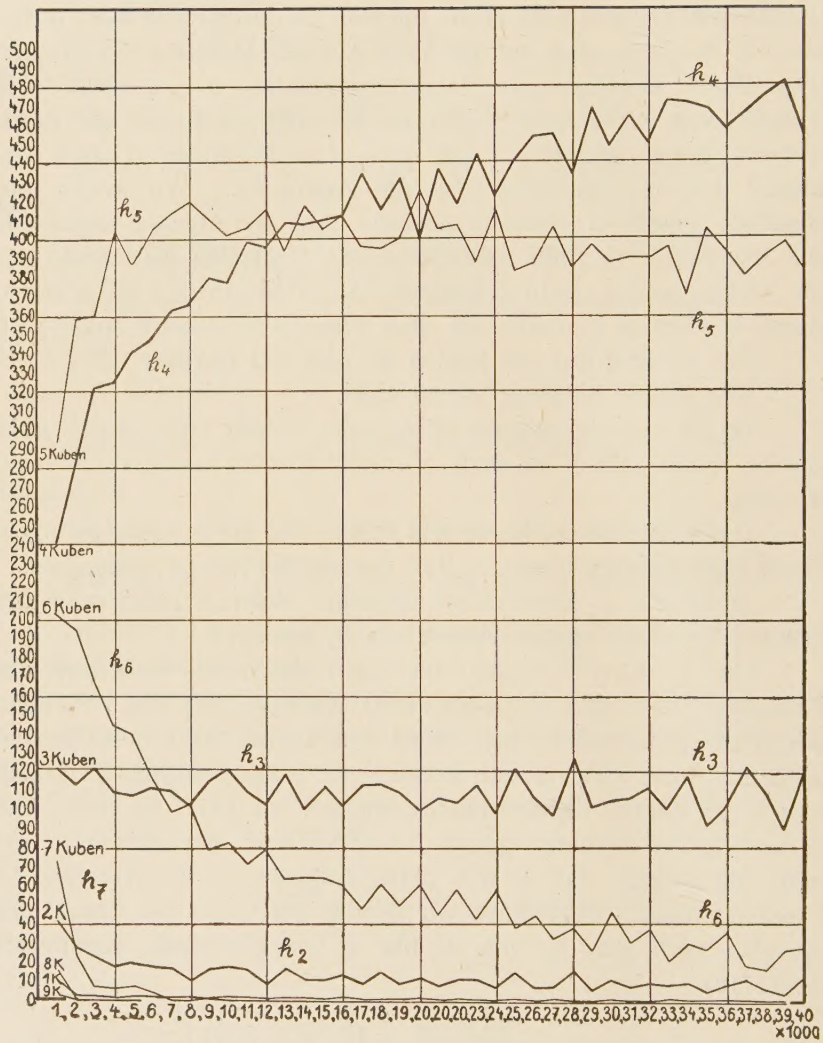
Das Fallen der h_6 Kurve läßt ahnen, daß die h_6 einen geringen, wenn nicht verschwindenden, Teil der ganzen Zahlen ausmachen.

Selbst die h_5 Kurve sinkt langsam. Wahrscheinlich wird der größere Teil aller ganzen Zahlen aus h_4 bestehen.

Die h_3 Kurve pendelt um einen gewissen Mittelwert der Ordinate. Aus einer (Sterneck'schen) Zusammenstellung errechnen wir, daß im arithmetischen Mittel 109,2 von 1000 konsekutiven Zahlen h_3 sind. Theoretisch können wir tatsächlich feststellen, daß von 1000 Zahlen durchschnittlich weniger als 137,7 h_3 sind. Die h_2 und h_1 verschwinden gegen die Gesamtheit der Zahlen*). So wird die Anzahl der h_3 mit derjenigen der g_3 im Wesentlichen übereinstimmen. Bezeichnen wir wieder mit $C_3(x)$ die Anzahl der g_3, also auch der h_3 von O bis x, so gilt nach Kempner[5]) (S. 12/13)

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{C_3(x)}{x} \leq \frac{1}{3:} \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) \right\}^3 = \frac{137{,}7}{1000}.$$

*) Vergl. Kempner S. 15, Fußnote 2.


500
490
480
470
460
450
440
430
420
410
400
390
380
370
360
350
340
330
320
310
300
290
280
270
260
250
240
230
220
210
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
h_4
h_5
h_4
h_5
5 Kuben
4 Kuben
6 Kuben
h_6
3 Kuben
h_3
h_3
7 Kuben
h_7
2 K
h_2
h_6
8 K
1 K
9 K
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
×1000

Literatur.

1. Waring, Meditationes algebraicae, 3. Aufl. Cambridge, 1782, S. 349
2. Wieferich, Math. Annalen, Bd. 66, 1909, S. 95/101.
3. Baer, Beiträge zum Waringschen Problem, Diss. Göttingen 1913.
4. v. Sterneck, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 112, 1903, Abt. 2a, S. 1267/1666.
5. Kempner, Ueber das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen, Diss. Göttingen 1912.

   Betreffs ausführlicher Literaturangaben verweise ich auf diese Kempnersche Dissertation.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Julius Fritz Post, am 26. November 1889 zu Neuhaus a. d. O. (Prov. Hannover) als Sohn des Königlichen Baurats Karl Post (†) und seiner Ehefrau Auguste geb. Kühne. Meine Schulbildung erhielt ich an der Vorschule und der Lateinischen Hauptschule der Franckeschen Stiftungen zu Halle, auf der ich Mich. 1908 das Reifezeugnis erwarb. Von W. S. 1908/9 — S. S. 1912 studierte ich an der Universität Halle Mathematik und Physik. Nach bestandener Prüfung für das höhere Lehramt bin ich seit Ostern 1914 unterbrochen durch Heeresdienst und Kriegsgefangenschaft im Schuldienste tätig.

Am 24. Januar 1920 bestand ich die mündliche Doktorprüfung. Allen meinen hochverehrten Lehrern bin ich zu großem Danke verpflichtet, insbesondere Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer, dem ich die Anregung zu vorliegender Arbeit verdanke.